香港資優教育學苑
The Hong Kong Academy for Gifted Education

International Mathematical Olympiad Preliminary Selection Contest – Hong Kong 2022

國際數學奧林匹克 — 香港選拔賽初賽 2022

21 May 2022 (Saturday)
2022 年 5 月 21 日（星期六）

Question Book
問題簿

Instructions to Contestants:
考生須知：

1. The contest comprises a 3-hour written test.
   比賽以筆試形式進行，限時三小時。

2. Questions are bilingual. Answer all questions.
   題目中英對照。全卷題目均須作答。

3. Put your answers on the answer sheet.
   請將答案寫在答題紙上。

4. The use of calculators is NOT allowed.
   不可使用計算機。

5. Measuring instruments like rulers, compasses, etc. can be used.
   直尺、圓規及其它量度工具可作輔助之用。

Co-organised by The Hong Kong Academy for Gifted Education,
the Gifted Education Section of the Education Bureau and
International Mathematical Olympiad Hong Kong Committee
香港資優教育學苑、教育局資優教育組及國際數學奧林匹克香港委員會合辦

1. If $x^2+y^2=\dfrac{3961xy}{1980}$ where $x>y>0$, find the value of $\dfrac{x+y}{x-y}$. (1 mark)

若 $x^2+y^2=\dfrac{3961xy}{1980}$，其中 $x>y>0$，求 $\dfrac{x+y}{x-y}$ 的值。 （1 分）

2. Let a and b be the two roots of the equation $x^{\frac{4}{3}}-2022x^{\frac{2}{3}}+2023=0$. If $p=a+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$ and $q=b+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$, find the value of $(p+q)^{\frac{2}{3}}+(p-q)^{\frac{2}{3}}$. (1 mark)

設 a、b 為方程 $x^{\frac{4}{3}}-2022x^{\frac{2}{3}}+2023=0$ 的兩根。若 $p=a+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$ 及 $q=b+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$，求 $(p+q)^{\frac{2}{3}}+(p-q)^{\frac{2}{3}}$ 的值。 （1 分）

3. How many pairs of positive integers (m,n) are there such that $m^2n=20^{22}$? (1 mark)

有多少對正整數 (m,n) 滿足 $m^2n=20^{22}$？ （1 分）

4. Given that $22!=1124000727777\boxed{}680000$, where the box contains three missing digits. Write down the missing digits from left to right. (1 mark)

已知 $22!=1124000727777\boxed{}680000$，其中空格內留空了三個數字。試從左至右寫出這三位留空的數字。 （1 分）

5. One edge of a triangular pyramid has length 6 while every other edge has length 5. Find the volume of the pyramid. (1 mark)

某三角錐體其中一條稜長度為 6，其餘各稜的長度均為 5。求錐體的體積。 （1 分）

6. Let P, Q, R be distinct digits. A positive integer n is equal to $\overline{1PQR}$ in base 8 and $\overline{RPQ}$ in base 11. Find the value of n in base 10. (1 mark)

設 P、Q、R 為不同的數字。某正整數 n 的八進制表示為 $\overline{1PQR}$，十一進制表示為 $\overline{RPQ}$。求 n 的值，答案以十進制表示。 （1 分）

7. A special calculator contains a red button, which counts the number of even digits of an integer. For instance, when the screen shows 2022, pressing the red button gives 4 since all 4 digits of 2022 are even. Someone inputs a positive integer n into the calculator and keeps pressing the red button until 0 is displayed on the screen. If 0 is displayed after the red button has been pressed four times, find the smallest possible value of n. (1 mark)

一部特別的計算機有一個紅色按鈕，可計算某整數的數字中有多少個偶數，例如：若螢幕上顯示 2022，則按下紅色按鈕可得到 4（因為 2022 的 4 個數字均為偶數）。某人在計算機上輸入一個正整數 n，然後連續按下紅色按鈕，直至螢幕上顯示 0 為止。若紅色按鈕被按了四次後螢幕上顯示 0，求 n 的最小可能值。 （1 分）

8. Find the largest real root of the equation $2x^2+6x+9=7x\sqrt{2x+3}$. (1 mark)

求方程 $2x^2+6x+9=7x\sqrt{2x+3}$ 的最大實根。（1 分）

9. $ABCD$ is a square with side length 1. P and Q are points on AB and BC respectively such that $BP=BQ=\frac{1}{\sqrt{2}}$. N is the foot of perpendicular from B to CP. Find NQ^2. (1 mark)

$ABCD$ 是邊長為 1 的正方形。P 和 Q 分別是 AB 和 BC 上的點，使得 $BP=BQ=\frac{1}{\sqrt{2}}$。N 是 B 到 CP 的垂足。求 NQ^2。（1 分）

10. In ΔABC, D, E, F are points on BC, CA and AB respectively such that the line segments AD, BE and CF meet at G. If the lengths of DG, EG, BG, AG and CF are 1, 2, 3, 4, 5 respectively, find the area of ΔABC. (1 mark)

在 ΔABC 中，D、E、F 分別是 BC、CA 和 AB 上的點，使得線段 AD、BE 和 CF 相交於 G。若 DG、EG、BG、AG、CF 的長度分別為 1、2、3、4、5，求 ΔABC 的面積。（1 分）

11. If $x^2-y^2=\frac{1}{22}$ and $x\neq 0$, find the greatest possible value of $\frac{1-22xy}{x^2}$. (2 marks)

若 $x^2-y^2=\frac{1}{22}$，且 $x\neq 0$，求 $\frac{1-22xy}{x^2}$ 的最大可能值。（2 分）

12. Let a, b, c be the three roots of the equation $6x^3+5x^2+4x+3=0$ and $S_n=a^n+b^n+c^n$. Find the value of $S_0+S_1+S_2+\cdots$. (2 marks)

設 a、b、c 為方程 $6x^3+5x^2+4x+3=0$ 的三根，且 $S_n=a^n+b^n+c^n$。求 $S_0+S_1+S_2+\cdots$ 的值。（2 分）

13. There are 50 rods of lengths 1, 3, 5, 7, …, 99. How many ways are there to pick three of these rods to form a triangle? (2 marks)

現有 50 根長度分別為 1、3、5、7、⋯、99 的棒。那麼，有多少種方法可以從中選三根棒以組成三角形？（2 分）

14. A ‘palindrome’ is a positive integer which reads the same from left to right as from right to left, such as 12321 and 259952. Someone wrote down a five-digit palindrome m and then removed a digit of m to obtain a four-digit positive integer n (that does not start with 0). How many possible values of n are there? (2 marks)

「回文數」指從左至右和從右至左看均相同的正整數，例如 12321 和 259952。某人寫下了一個五位回文數 m，然後刪掉 m 的其中一位數字，從而得到一個四位正整數 n（其開首不是 0）。那麼，n 有多少個不同的可能值？（2 分）

15. Someone obtained a positive integer n by concatenating the positive integers from 1 to 100000 in order, i.e. $n = 123456789101112\ldots9999899999100000$. How many times does '2022' appear as consecutive digits of n? (2 marks)

某人把正整數 1 至 100000 順序連接起來，從而得到一個正整數 n，即 $n = 123456789101112\ldots9999899999100000$。那麼，「2022」以四位連續數字的姿態在 n 出現了多少次？（2 分）

16. $ABCD$ is a parallelogram with $\angle B$ acute. A circle is tangent to BC, CD and DA. The circle intersects AC at M and N, where M is closer to A than N. If $AM = 9$, $MN = 16$ and $NC = 2$, find the area of $ABCD$. (2 marks)

$ABCD$ 是平行四邊形，其中 B 是銳角。某圓與 BC、CD 和 DA 相切，且與 AC 相交於 M 和 N，其中 M 比 N 靠近 A。若 $AM = 9$、$MN = 16$ 及 $NC = 2$，求 $ABCD$ 的面積。（2 分）

17. There are four positive integers. By computing the H.C.F. of two of them at a time, one gets six different values 1, 2, 3, 4, 5, k. Find the smallest possible value of k. (2 marks)

現有四個正整數。每次選其中兩個計算其最大公因數的話，共可得到六個不同的值：1、2、3、4、5、k。求 k 的最小可能值。（2 分）

18. At a party there are 1234 participants, and each of them has shaken hands with exactly 137 other participants. It is known that no three participants have shaken hands with each other. Furthermore, for any two participants A and B who have not shaken hands with each other, there must be exactly k other participants who have shaken hands with both A and B, where k is a fixed constant. Find the value of k. (2 marks)

1234 人參加一次聚會，當中每人均與剛好 137 名其他參加者握手，且當中沒有三人曾經互相握手。此外，若兩名參加者 A 和 B 不曾互相握手，則必定有剛好 k 名其他參加者跟 A 和 B 也有握手，其中 k 是固定的常數。求 k 的值。（2 分）

19. In ΔABC, $AB < AC$. The internal bisector of $\angle BAC$ meets BC at D, while the external bisector of $\angle BAC$ meets CB produced at E. If $EB = 2022$ and the lengths of BD and DC are integers, how many possible lengths of BD are there? (2 marks)

在 ΔABC 中，$AB < AC$。$\angle BAC$ 的內角平分線交 BC 於 D，其外角平分線則與 CB 的延線交於 E。若 $EB = 2022$，且 BD 和 DC 的長度均為整數，則 BD 的長度有多少個不同的可能值？（2 分）

20. Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral and E be the intersection of AC and BD. P and Q are two points on AC such that the points A, E, Q, P, C lie on the same straight line in this order, and that BP bisects $\angle ABC$ whereas DQ bisects $\angle ADC$. If $AE = 4$, $EQ = 2$ and $QP = 3$, find the length of PC. (2 marks)

設 $ABCD$ 為圓內接四邊形，E 為 AC 和 BD 的交點。P 和 Q 是 AC 上的兩點，使得點 A、E、Q、P、C 按此順序成一直線，且 BP 平分 $\angle ABC$ 及 DQ 平分 $\angle ADC$。若 $AE = 4$、$EQ = 2$ 及 $QP = 3$，求 PC 的長度。（2 分）

End of Paper

全卷完