International Mathematical Olympiad
Preliminary Selection Contest 2003 – Hong Kong
國際數學奧林匹克
2003 香港選拔賽

May 31, 2003
二零零三年五月三十一日

Time allowed: 3 hours
時限：3 小時

Answer ALL questions.
本卷各題全答。

Put your answers on the answer sheet.
請將答案寫在答題紙上。

The use of calculator is NOT allowed.
不可使用計算機。

1. Let $x=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$. Find the value of $\left(1+\frac{1}{x}\right)^3$. (1 mark)

2. 15 students join a summer course. Every day, 3 students are on duty after school to clean the classroom. After the course, it was found that every pair of students have been on duty together exactly once. How many days does the course last for? (1 mark)

3. Find the number of pairs of consecutive integers in the set {1000, 1001, 1002, …, 2000} such that no carrying is required when the two integers are added. (1 mark)

4. A positive integer *x* is called a *magic number* if, when *x* is expressed in binary form, it possesses an even number of '1's. For example, the first five magic numbers are 3, 5, 6, 9 and 10. Find, in decimal notation, the sum of the first 2003 magic numbers. (1 mark)

5. A positive integer *n* is said to be *increasing* if, by reversing the digits of *n*, we get an integer larger than *n*. For example, 2003 is increasing because, by reversing the digits of 2003, we get 3002, which is larger than 2003. How many four-digit positive integers are increasing? (1 mark)

6. The ratio of the sides of a triangle, which is inscribed in a circle of radius $2\sqrt{3}$, is $3:5:7$. Find the area of the triangle. (1 mark)

7. The number of apples produced by a group of farmers is less than 1000. It is known that they shared the apples in the following way. In turn, each farmer took from the collection of apples either *exactly* one-half or *exactly* one-third of the apples remaining in the collection. No apples were cut into pieces. After each farmer had taken his share, the rest was given to charity. Find the greatest number of farmers that could take part in the apple sharing. (1 mark)

8. Let *a* and *b* be positive integers such that $90<a+b<99$ and $0.9<\frac{a}{b}<0.91$. Find ab. (1 mark)

9. Find an integer *x* such that $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=\left(1+\frac{1}{2003}\right)^{2003}$. (1 mark)

10. Simplify $(\cos 42^\circ+\cos 102^\circ+\cos 114^\circ+\cos 174^\circ)^2$ into a rational number. (1 mark)

11. On a certain planet there are 100 countries. They all agree to form unions, each with a maximum of 50 countries, and that each country will be joining a number of unions, so that every two different countries will belong to a same union. At least how many unions must be formed? (1 mark)

12. Find the last two digits of $7\times 19\times 31\times\cdots\times 1999$. (Here 7, 19, 31, …, 1999 form an arithmetic sequence of common difference 12.) (1 mark)

13. *ABCDEFGH* is a cube in which *ABCD* is the top face, with vertices *H*, *G*, *F* and *E* directly below the vertices *A*, *B*, *C* and *D* respectively. A real number is assigned to each vertex. At each vertex, the average of the numbers in the three adjacent vertices is then computed. The averages obtained at *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* are 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 respectively. Find the number assigned to vertex *F*. (2 marks)

14. A regular 201-sided polygon is inscribed inside a circle of center *C*. Triangles are drawn by connecting any three of the 201 vertices of the polygon. How many of these triangles have the point *C* lying inside the triangle? (2 marks)

15. Given a rectangle *ABCD*, *X* and *Y* are respectively points on *AB* and *BC*. Suppose the areas of the triangles ΔAXD, ΔBXY and ΔDYC are respectively 5, 4 and 3. Find the area of ΔDXY. (2 marks)

16. Let ΔABC be an acute triangle, $BC=5$. *E* is a point on *AC* such that $BE\perp AC$, *F* is a point on *AB* such that $AF=BF$. Moreover, $BE=CF=4$. Find the area of the triangle. (2 marks)

17. Given a triangle ΔABC, $\angle ABC=80^\circ$, $\angle ACB=70^\circ$ and $BC=2$. A perpendicular line is drawn from *A* to *BC*, another perpendicular line drawn from *B* to *AC*. The two perpendicular lines meet at *H*. Find the length of *AH*. (2 marks)

18. Let *A* be a set containing only positive integers, and for any elements *x* and *y* in *A*, $|x-y|\geq\frac{xy}{30}$. Determine at most how many elements *A* may contain. (2 marks)

19. A man chooses two positive integers *m* and *n*. He then defines a positive integer *k* to be *good* if a triangle with side lengths log *m*, log *n* and log *k* exists. He finds that there are exactly 100 good numbers. Find the maximum possible value of *mn*. (3 marks)

20. The perimeter of triangle *ABC*, in which $AB<AC$, is 7 times the side length of *BC*. The inscribed circle of the triangle touches *BC* at *E*, and the diameter *DE* of the circle is drawn, cutting the median from *A* to *BC* at *F*. Find $\frac{DF}{FE}$. (3 marks)

End of Paper

1. 設 $x=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$。求 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^3$ 的值。 （1 分）

2. 15 名學生參加了一個暑期課程。每天放學後，均有 3 名學生當值，負責清潔課室。課程結束後，發現任何兩名學生均曾經同時當值剛好一次。問課程共為期多少天？ （1 分）

3. 在集合 $\{1000, 1001, 1002, \ldots, 2000\}$ 中，有多少對連續整數加起來時不用進位？ （1 分）

4. 若正整數 x 以二進制表示時「1」的數目為偶數，則 x 稱為「魔幻數」。例如，首五個「魔幻數」為 3、5、6、9、10。求首 2003 個「魔幻數」之和，答案以十進制表示。 （1 分）

5. 設 n 為正整數。當我們把 n 的數字左右倒轉時，或會得到一個比 n 大的數。這樣的 n 稱為「遞增數」。例如，當我們把 2003 左右倒轉，便得到 3002；而 3002 比 2003 大，故此 2003 為「遞增數」。共有多少個四位正整數為「遞增數」？ （1 分）

6. 某三角形內接於一個半徑為 $2\sqrt{3}$ 的圓形內，它各邊長度之比為 $3:5:7$。求這個三角形的面積。（1 分）

7. 一群農夫收成了一批少於 1000 個的蘋果。他們分蘋果的方法如下：每人輪流取蘋果一次，每次皆取走餘下蘋果的剛好一半或剛好三分之一，而且不能把蘋果切開。當所有農夫均取過蘋果後，餘下的蘋果撥充善舉。最多有幾名農夫分蘋果？ （1 分）

8. 設 a、b 為正整數，且 $90<a+b<99$，及 $0.9<\frac{a}{b}<0.91$。求 ab。 （1 分）

9. 求一個整數 x，使得 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=\left(1+\frac{1}{2003}\right)^{2003}$ 。 （1 分）

10. 把 $(\cos 42°+\cos 102°+\cos 114°+\cos 174°)^2$ 化簡成一個有理數。 （1 分）

11. 某星球上共有 100 個國家，它們之間組成不同的聯盟，每個聯盟最多有 50 個會員國。每個國家均加入若干個聯盟，使得任何兩個國家均同時屬於某個聯盟。那麼，至少要組成多少個聯盟？ （1 分）

12. 求 $7\times 19\times 31\times\cdots\times 1999$ 的最後兩位數字。（當中 7、19、31、⋯、1999 各數組成一個公差為 12 的等差數列。） （1 分）

13. $ABCDEFGH$ 為正立方體，其中 $ABCD$ 為頂面，H、G、F、E 分別位於 A、B、C、D 的下方。現於每個頂點均寫下一個實數，然後在每個頂點計算其三個相鄰頂點上各數的平均值。在 A、B、C、D、E、F、G、H 點計出的平均值分別為 1、2、3、4、5、6、7、8。求在 F 點寫下的數。 （2 分）

14. 一個正 201 邊形內接於一個以 C 為圓心的圓形內。把多邊形 201 個頂點中的任意三個頂點連起，可以組成不同的三角形。有多少個這樣的三角形，將 C 點包含在其內部？ （2 分）

15. $ABCD$ 為長方形，X 和 Y 分別為 AB 和 BC 上的點。若 ΔAXD、ΔBXY 和 ΔDYC 的面積分別為 5、4、3，求 ΔDXY 的面積。 （2 分）

16. ΔABC 為銳角三角形，$BC=5$。E 為 AC 上的一點，使得 $BE\perp AC$；F 為 AB 上的一點，使得 $AF=BF$；而且 $BE=CF=4$。求 ΔABC 的面積。 （2 分）

17. 在 ΔABC 中，$\angle ABC = 80°$，$\angle ACB = 70°$，且 $BC = 2$。由 A 作線垂直於 BC，由 B 作線垂直於 AC，兩垂直線相交於 H。求 AH 的長度。 （2 分）

18. 設 A 為一個只有正整數的集合，使得對於 A 中的任何元素 x 和 y，皆有 $|x-y|\geq\frac{xy}{30}$。問 A 最多有多少個元素？ （2 分）

19. 某人選了兩個正整數 m 和 n。對於正整數 k，若存在一個邊長為 $\log m$、$\log n$ 及 $\log k$ 的三角形，他便稱 k 為「好數」。他發現剛好有 100 個「好數」。求 mn 的最大可能值。 （3 分）

20. ΔABC 的周界為 BC 長度的 7 倍，而且 $AB<AC$。DE 為 ΔABC 內切圓的直徑，交 BC 於 E。A 到 BC 的中線交 DE 於 F。求 $\frac{DF}{FE}$。 （3 分）

全卷完