香港資優教育學苑
The Hong Kong Academy for Gifted Education

International Mathematical Olympiad Preliminary Selection Contest – Hong Kong 2018

國際數學奧林匹克 — 香港選拔賽初賽 2018

19 May 2018 (Saturday)
2018 年 5 月 19 日（星期六）

Question Paper
試卷

Instructions to Contestants:
考生須知：

1. The contest comprises a 3-hour written test.
   比賽以筆試形式進行，限時三小時。

2. Questions are in bilingual versions. Answer all questions.
   題目中英對照。全卷題目均須作答。

3. Put your answers on the answer sheet.
   請將答案寫在答題紙上。

4. The use of calculators is NOT allowed.
   不可使用計算機。

5. Measuring instruments like rulers, compasses, etc. can be used.
   直尺、圓規及其它量度工具可作輔助之用。

Co-organised by The Hong Kong Academy for Gifted Education,
the Gifted Education Section of the Education Bureau and
International Mathematical Olympiad Hong Kong Committee
香港資優教育學苑、教育局資優教育組及國際數學奧林匹克香港委員會合辦

1. There are 13 fractions, whose numerators and denominators are 1, 2, …, 26, each appearing exactly once either as a numerator or a denominator. At most how many of these fractions can be simplified to integers? (1 mark)

現有 13 個分數，當中的分子和分母分別是 1、2、…、26，其中每個數均出現在分子或分母剛好一次。這些分數當中，最多有多少個可以化簡成整數？ （1 分）

2. In denoting the product of two three-digit numbers, the multiplication sign in between was accidentally omitted, resulting in a six-digit number. If the six-digit number is equal to 3 times the original product, find this six-digit number. (1 mark)

某人在記下兩個三位數的乘積時，意外地遺漏了中間的乘號，結果變成了一個六位數。若該六位數等於原來乘積的 3 倍，求此六位數。 （1 分）

3. In ΔABC, $\angle BAC = 18°$ and $\angle BCA = 24°$. D is a point on AC such that $\angle BDC = 60°$. If the bisector of $\angle ADB$ meets AB at E, find $\angle BEC$. (1 mark)

在 ΔABC 中，$\angle BAC = 18°$ 及 $\angle BCA = 24°$。D 是 AC 上的一點，使得 $\angle BDC = 60°$。若 $\angle ADB$ 的平分線交 AB 於 E，求 $\angle BEC$。 （1 分）

4. For any real number x, the function f satisfies $f(x+2) = -f(x) = f(-x)$. If $f(x) = 2x$ for $0 < x < 1$, find the value of $f(10\sqrt{3})$. (1 mark)

對任意實數 x，函數 f 皆滿足 $f(x+2) = -f(x) = f(-x)$。若對 $0 < x < 1$ 有 $f(x) = 2x$，求 $f(10\sqrt{3})$ 的值。 （1 分）

5. Let n be an integer greater than 100 such that the L.C.M. of 1, 2, 3, …, n is equal to the L.C.M. of 101, 102, 103, …, n. Find the smallest possible value of n. (1 mark)

設 n 為大於 100 的整數，使得 1、2、3、…、n 的最小公倍數等於 101、102、103、…、n 的最小公倍數。求 n 的最小可能值。 （1 分）

6. Find a prime number p such that $p-1$ has exactly 10 positive factors while $p+1$ has exactly 6 positive factors. (1 mark)

求一個質數 p，使得 $p-1$ 有剛好 10 個正因數，且 $p+1$ 有剛好 6 個正因數。 （1 分）

7. A child filled the cells of a 3×3 table by the numbers 1, 2, 3, …, 9 so that each number is used once. He circled the median of the three numbers in each row, and found that the median of the three circled numbers be 5. In how many different ways could he fill he table? (1 mark)

一名孩子把數字 1、2、3、…、9 填進一個 3×3 表格中，每個數字均使用一次。他把每行三個數的中位數圈出來後，發現被圈出的三個數的中位數為 5。那麼，他有多少種不同的方法填數字？ （1 分）

8. How many polynomials $P(x)$ of degree not exceeding 3 are there such that each coefficient is a non-negative integer less than 10, and that $P(-1)=-9$? (1 mark)

有多少個次數不超過 3 的多項式的所有係數均為小於 10 的非負整數，且 $P(-1)=-9$？（1 分）

9. In ΔABC, $AB=9$, $AC=12$ and $BC=15$. X, Y, Z are points on AB, BC and CA respectively such that $0<AX=BY=CZ<9$. If the area of ΔXYZ is an integer, find the sum of all possible values of this integer. (1 mark)

在 ΔABC 中，$AB=9$、$AC=12$ 及 $BC=15$。X、Y、Z 分別是 AB、BC 和 CA 上的點，使得 $0<AX=BY=CZ<9$。若 ΔXYZ 的面積為整數，求此整數的所有可能值之和。（1 分）

10. On the coordinate plane, points (x, y) satisfying $x, y \geq 0$ and $x+y+[x]+[y] \leq 2019$ are coloured blue. (Here $[x]$ denotes the greatest integer less than or equal to x, e.g. $[\pi]=3$ and $[\sqrt{7}]=2$.) Find the area of the blue region. (1 mark)

在座標平面上，滿足 $x, y \geq 0$ 及 $x+y+[x]+[y] \leq 2019$ 的點 (x, y) 均被塗上藍色（這裏 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數，例如 $[\pi]=3$ 及 $[\sqrt{7}]=2$）。求藍色區域的面積。（1 分）

11. Find the last four digits of $2^{27653}-1$. (2 marks)

求 $2^{27653}-1$ 的最後四位數字。（2 分）

12. Expanding $(x^2+3x+2)^2$ and simplifying (collecting like times) gives $x^4+6x^3+13x^2+12x+4$, which consists of 5 terms. If we expand $(a^2+20ab+18)^{2018}$ and simplify, how many terms will there be? (2 marks)

把 $(x^2+3x+2)^2$ 展開並化簡（合併同類項）可得 $x^4+6x^3+13x^2+12x+4$，當中共有 5 項。若把 $(a^2+20ab+18)^{2018}$ 展開並化簡，共會得到多少項？（2 分）

13. Let O be the circumcentre of ΔABC. Suppose $AB=1$ and $AO=AC=2$. D and E are points on the extensions of AB and AC respectively such that $OD=OE$ and $BD=\sqrt{2}EC$. Find the value of OD^2. (2 marks)

設 O 為 ΔABC 的外心，且 $AB=1$ 及 $AO=AC=2$。D 和 E 分別是 AB 和 AC 的延線上的點，使得 $OD=OE$ 及 $BD=\sqrt{2}EC$。求 OD^2 的值。（2 分）

14. Let n be a positive integer. If $3n^3-2019$ is a positive multiple of 2016, find the smallest possible value of n. (2 marks)

設 n 為正整數。若 $3n^3-2019$ 是 2016 的正倍數，求 n 的最小可能值。（2 分）

15. In ΔABC, $AB = AC = 20$ and $BC = 18$. D is a point on BC such that $BD < DC$. E is the image of reflection of C across AD. The extensions of EB and AD meet at F. Find the value of $AD \times AF$. (2 marks)

在 ΔABC 中，$AB = AC = 20$ 及 $BC = 18$。D 是 BC 上的一點，使得 $BD < DC$。E 是 C 點沿 AD 反射的影像。EB 和 AD 延長後交於 F。求 $AD \times AF$ 的值。（2 分）

16. $ABCD$ is a cyclic quadrilateral with $AC = 56$, $BD = 65$, $BC > DA$ and $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{CD}{DA}$. Find the ratio of the area of ΔABC to the area of ΔADC. (2 marks)

$ABCD$ 是圓內接四邊形，其中 $AC = 56$、$BD = 65$、$BC > DA$ 及 $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{CD}{DA}$。求 ΔABC 與 ΔADC 的面積之比。（2 分）

17. A real number a is randomly chosen in the interval $-20 \le a \le 18$. What is the probability that all roots of the equation $x^3 + (2a+1)x^2 + (4a-1)x + 2 = 0$ are real? (2 marks)

現於 $-20 \le a \le 18$ 的區間內隨機選出一個實數 a。那麼，方程 $x^3 + (2a+1)x^2 + (4a-1)x + 2 = 0$ 的所有根均為實數的概率是多少？（2 分）

18. There are 12 students in a class, numbered 1 to 12. Each student tosses a coin, and gets a score equal to his class number if a head is obtained, and a score of 0 otherwise. What is the probability that the total score of the class is divisible by 3? (2 marks)

某班有 12 名學生，編號為 1 至 12。每名學生均投擲一枚硬幣，若擲得正面可獲得相等於其學號的分數，擲得反面則得 0 分。那麼，全班總分可被 3 整除的概率是多少？（2 分）

19. A frog started from the origin of the coordinate plane and made three jumps. Each time the frog jumped a distance of 5 units and landed at a point with integer coordinates. How many different possibilities of the final position of the frog are there? (2 marks)

一隻青蛙從座標平面上的原點出發，作出三次跳躍。每次跳躍的距離均為 5 單位，且每次均會跳到一個擁有整數座標的點。青蛙的最終位置有多少個不同的可能性？（2 分）

20. Find the product of the real roots to the equation $x^2 + 7x - 5 = 5\sqrt{x^3 - 1}$. (2 marks)

求方程 $x^2 + 7x - 5 = 5\sqrt{x^3 - 1}$ 所有實根之積。（2 分）

– End of Paper – 全卷完 –